K Gregory 1 ...
530.L33
4

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ:

A

JACOBO GREGORIO, Scoto, è R. Societate.

Pag.

Appendicula ad veram Circuli & Hyperbolæ Quadraturam. 1

N. Mercatoris *Quadratura Hyperbolæ Geometricè demonstrata.* 9

Analogia inter Lineam Meridianam Planisphærii Nautici & Tangentes Artificiales Geometricè demonstrata; seu, quod Secantium Naturalium additio efficiat Tangentes Artificiales. 14

Item, Quòd Tangentium Naturalium additio efficiat Secantes Artificiales. 21

Quadratura Conchoidis. 23

Quadratura Cissoidis. 24

Methodus Facilis & accurata componendi Secantes & Tangentes Artificiales. 25

LONDINI,

Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ; in vico vulgò vocato *Little Britain.*

Anno M. DC. LXVIII.

Præfatio.

TAnta eſt in ratiocinio Mathematico certitudo & evidentia, ut eo ritè conſiderato nihil non audeant etiam Viri modeſtiſſimi: ſi tamen magni quid tentaverint, adeo innata eſt humano generi invidia & æmulatio, ut generalis quaſi fiat conſenſus, illos ludi brio exponendi: eorum enim inventa (etiamſi veriſſima) à prorſus ignaris deridentur, à ſciolis vel ſurripiuntur vel rejiciuntur, & à verè doctis (quorum judicio & authoritati talia ſubmittuntur) neglecta manent. Imo non deſunt, qui, ejuſdem inventi partem ignobiliorem, aliis quippe approbatam, ſibi arrogant, & reliqua longè ſubtiliora non ſine famæ ſuæ jacturâ faſtuosè rejiciunt

ciunt; reſponſa interim ſpernunt, præclarius exiſtimantes, infallibiles haberi apud ignaros, quàm ingenui apud doctos : O cœca famæ libido, quæ homines ita dementat, ut omniſcii apparere fatagant ! Non carent hoc communi fato noſtræ de circulo & hyperbolâ lucubrationes, quas à pauciſſimis video vel intelligi vel examinatu dignas æſtimari : Cenſores enim plerique ſcriptorum potius famam quàm rationes conſiderant ; nam adeo arridet hominibus authoritas, ut nihil novi (quod alicujus momenti ſit) à novis authoribus inveniri credant. Ego tam iniquis cenſuris ſtimulatus, hiſce exercitationibus conabor oſtendere, etiam in rebus Mathematicis maximè obviis & uſui humano neceſſariis, non pauca eſſe quæ ſubtiliſſimos Geometras hucuſque latuerunt ; atque ita fortaſſe de aliis noſtris ſpeculationibus minùs rigidè judicabitur. Quæ interim objiciuntur à præſtantiſſimo Geometra contra noſtram Doctrinam, hic reſolvere conabor. *Admitto* (inquit) *in Prop.* 11 *Demonſtratum eſſe, quod Sector A B I P non ſit analyticè compoſitus à triangulo A B P & Trapezio A B F P ; ſed non video ubi demonſtretur Sectorem A B I P non eſſe analyticè*

lyticè compoſitum ex aliis quantitatibus. Ego facilè agnoſco infinitas alias eſſe quantitates, è quibus analyticè componitur Sector A B I P, ſed R. Virum interrogo, quomodo innoteſcant illæ quantitates è datis ſolummodo triangulo A B P & Trapezio A B F P, nam hæ Problema determinant, & proinde aliæ fruſtra dantur : ſi autem inveniantur ; inveniuntur vel analyticè vel non analyticè ; ſi poſterius, concedo totum ; ſi autem analyticè inveniantur è quantitatibus A B C, A B F P, & Sector rurſus analyticè componatur ex illis ; Idem Sector etiam analyticè componetur ex quantitatibus A B P, A B F P, quod eſt abſurdum, nempe contra Prop. 11, quæ admittitur. Si antem inſiſtatur, Sectorem poſſe componi analyticè ex aliis quantitatibus, quæ illum determinant præter A B P, A B F P : dico A B P, A B F P, vel poſſe componi analyticè ex aliis illis quantitatibus vel non ; ſi poſterius, concedo totum, ſed tales quantitates exhiberi deſidero ; ſi prius, Analyſeos tenorem examinando, ſatis conſtabit alias illas quantitates etiam analyticè componi ex A B P, A B F P, & ita ad primum caſum relabimur. Satis etiam ſciunt Geometræ, perinde eſſe

quo-

quo ad ſolutionem, quomodocunque determinetur problema; ſi igitur ſolutio analytica ſit impoſſibilis ex quantitatibus ABP, ABFP, illud determinantibus; impoſſibilis etiam erit ex aliis, quæ analyticè exhiberi poſſunt. Exiſtimabam duas noſtras petitiones unà cum ſcholio Prop. 11. huic dubio ſatisfeciſſe; ſed fateor humeris meis onus impar, nova principia (etiamſi intellectui claro & exercitato evidentiſſima) ita ſtabilire, ut unicuique ſatisfiat. Poſſem aliis objectionibus hic reſpondere, quæ me anxium tenebant, dum hæc primò mente revolverem; ſed animadverto objectiones Mathematicas cuilibet præter Authorem proprium frivolas apparere. In Epiſtola *veræ Circ. & Hyperb. quadraturæ* pag. 5. Agnoſco me totum inſtitutum ad puram Geometriam non reduxiſſe, quoniam robur principalis prop. nempe 11. dependet tantùm ex Canonibus analyticis; adeo certa tamen eſt, ut, eâ vacillante, neceſſario corruat tota Analyſis: at in reliquis omnibus exiſtimo me rigorosè ſatisfeciſſe. Si autem quis velit rigore Geometrico prop. 11. demonſtrare; poterit fortaſſe in inſtitutum aſſequi hac ratione. Demonſtretur primo

mò hæc notio incommenſurabilitas: Si fuerint duæ vel plures quantitates inter ſe commenſurabiles, & quædam alia, quæ ex illarum Additione, Subductione, Multiplicatione, Diviſione, non poteſt componi; erit illa alia quantitas prioribus incommenſurabilis, & vice versâ: deinde ex hac notione deducatur univerſalis doctrina incommenſurabilitatis; quæ erit non ſolùm analoga huic doctrinæ non analyticæ, ſed illi etiam viam ſternet.

Errata

Errata quæ ſenſum perturbant ſic corriguntur.

Pag. 12. L. 11. pro $\frac{1}{4}$ ſexti lege $\frac{1}{4}$ ſexti. Pag. 13. L. 21. pro H ſemper leg. L. Pag. 15. L. 24. pro E V lege F V.

APPEN-

APPENDICULA
Ad Veram
CIRCULI
&
HYPERBOLÆ QUADRATURAM.

ANte menſes aliquot evulgavit Nobiliſſimus Vir *Chriſtianus Hugenius* animadverſiones quaſdam in meam Circuli & Hyperbolæ quadraturam, quibus exiſtimo me (in tranſactionibus Philoſophicis Menſis *Julii*) ſolide ſatisfeciſſe : duæ autem fuerunt parvi momenti, quibus tunc temporis reſpondere non potui; utpote in ejus ſcriptis nequaquam verſatus : prima erat, quod mea circuli approximatio eſſet minùs præciſa quam ſua; ſecunda, quod mea Hyperbolæ menſuratio eſſet optima, quam tamen non credebat R. Societati apparere novam, quoniam illam eandem Hyperbolæ quadraturam ante aliquot annos ſuppoſuit; Dum R. Societati monſtraret methodum ſuam inveniendi aëris gravitates in diverſis a terra diſtantiis. Conatur hic tacitè *Hugenius* me ignorantiæ & plagii accuſare; ſed non animadvertit ſe ſibi contradicere, dum meam Hyperbolæ menſurationem amplectitur, circularem autem rejicit, cum utraque una & eadem ſit : oportet ergo ut non percipiat ultimas ſuas approximationes in libro de magnitudine Circuli (quas tanti æſtimat) Hyperbolæ etiam eſſe applicabiles; debuit igitur & meam Hyperbolæ quadraturam rejicere : at animadvertendum eſt ultimam meam approximationem (cujus demonſtratio ex hac appendicula dependet) in fine Prop. 25, magis eſſe præciſam & multo minus laborioſam quam ulla *Hugeniana*. Quod attinet ad ſecundam *Hugenii* accuſationem : expectabam certe à tanto viro majorem ingenuitatem, Nec enim potui

hactenus

hactenus edoceri, esse quenquam è Societ. Regia, qui tale quid ab *Hugenio* unquam prolatum recordatur. Non solum prædictæ rationes sed etiam aliæ mihi quasi persuadent Hyperbolæ quadraturam, saltem ante tot annos, *Hugenio* non innotuisse: nam nihil in tota Geometria à Mathematicis adeo est desideratum, immo nec usui humano magis accommodatum, quis ergo Geometra speculationem non solum celeberimam sed etiam maximæ utilitatis 7 vel 8 annorum spatio adeo superstitiosè celaret; & præcipuè *Hugenius*, qui non adeo alienus est à scribendi pruritu, ut res ordinarias aliquando etiam satis prolixè non edat in lucem: testantur *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis Centro*, quæ sunt solummodo consectaria ad generalia *Guldini* inventa, anno 1635 impressa, supposito tantum solido rotundo Hyperbolico circa Diametrum conjugatam, quod inventu non est difficile: testatur quoque *liber de Magnitudine Circuli*, qui aliud non est quam comparatio segmenti Circularis cum segmento parabolico inscripto vel circumscripto eidem triangulo, satis etiam prolixe in lucem editus: atque hæc omnia subtilitate utilitate & gloriâ Hyperboles quadraturæ longè cedunt, hanc autem suo nomine indignam, vel reliquis saltem indigniorem censuit *Hugenius*. At parum refert quis sit ejus primus inventor, satis enim constat me primum esse publicatorem; neque mihi esset difficile affirmare (si modo mentiri vellem) me ante 20 annos illam cognovisse: utcunque sit, conabor hic Circuli & Hyperbolæ quadraturam ad talem perfectionem promovere, ut *Hugenius* prolem suam vix cognoscat.

Invenimus nos duplex compendium in mensuratione Circuli & Hyperbolæ; Primum consistit in continuatione seriei convergentis; Secundum in methodo inveniendi approximationes.

2L		A	B
M	a	C	D
P	2Q	E	F
R	4S	G	H
T	8V	I	K
X	16Y	N	O
		Z	

PROP.

PROP. I.

INter A, B quantitates arbitrarias ſit media Geometrica C, item inter C, B ſit media harmonica D, & continuetur ſeries convergens, ut ſit ejus terminatio, ſeu Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolæ ſector Z. Sit ut B ad C ita quantitas ad libitum 2 L ad M, ſitque inter L & 2 L + M media Geometrica P, & fiat Q^2 = differentiæ inter $4L^2$ & P^2, item a^2 = differentiæ inter $4L^2$ & M^2. Dico $a : 2Q :: C : E$. Nam $B : C :: 2L : M$, & convertendo & componendo $C + B : B :: M + 2L : 2L$, ſed $C + B : B :: 2C : D$, & ideo $2C : D :: M + 2L : 2L$, & duos ultimos analogiæ terminos ducendo in differentiam inter M & 2 L, 2 C eſt ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $4L^2$ & 2 ML, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, C eſt ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $8L^2$ & $4ML = 4Q^2$, hoc eſt, C^2 eſt ad E^2 ut differentia inter $4L^2$ & $M^2 = a^2$ ad $4Q^2$, & ideo $C : E :: a : 2Q$, quod, *&c.*

PROP. II.

Eiſdem poſitis quæ in antecedente. Dico $E : D :: P : 2L$. ex antecedente $2C : D :: M + 2L : 2L$, & ultimos terminos ducendo in L, $2C : D :: ML + 2L^2 : 2L^2$, & conſequentes duplicando, item priores bipartiendo $C : D :: ML + 2L^2 = P^2 - 4L^2$, & ideo $E : D :: P : 2L$, quod, *&c.*

PROP. III.

Eiſdem poſitis, ſit inter L & 2 L + P media Geometrica R, ſitque S^2 = differentiæ inter $4L^2$ & R^2. Dico $C : G :: a : 4S$. Eſt enim $E : D :: P : 2L$, & componendo $E + D : D :: P + 2L : 2L$, ſed $E + D : D :: 2E : F$, & proinde $2E : F :: P + 2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in differentiam inter 2 L & P, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, E eſt ad F ut differentia inter $4L^2$ & $P^2 = Q^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & $4PL = 4S^2$, & ideo $E : G :: Q : 2S$, & $E : G :: 2Q : 4S$, at ex hujus ima $C : E :: a : 2Q$, & ideo ex æqualitate $C : G :: a : 4S$, quod, *&c.*

PROP. IV.

Eſdem poſitis, dico $G : F :: R : 2L$. ex antecedente $2E : F :: P + 2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in L, $2E : F :: PL + 2L^2 : 2L^2$, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, $E : F :: PL + 2L^2 = R^2 : 4L^2$, & ideo $G : F :: R : 2L$, quod, *&c.*

PROP. V.

Eſdem poſitis, ſit inter L & $2L + R$ media Geometrica T, ſitque V^2 æqualis differentiæ inter $4L^2$ & T^2. Dico $C : I :: a : 8V$. Eſt enim $G : F :: R : 2L$ & componendo $G + F : F :: R + 2L : 2L$, ſed $G + E : F :: 2G : H$, & ideo $2G : H :: R + 2L : 2L$, & poſteriores terminos ducendo in differentiam inter 2L & R, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, G eſt ad H ut differentia inter $4L^2$ & $R^2 = S^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & 4RL = $4V^2$, & ideo $G : I :: S : 2V$, & $G : I :: 4S : 8V$, & ex hujus 3tia $C : G :: a : 4S$, & ideo ex æqualitate $C : I :: a : 8V$, quod, *&c.*

SCHOLIUM.

EX prædictis manifeſtum eſt ſeriem *a*, 2Q, 4S, 8V, 16Y, *&c.* eſſe analogam ſeriei C, E, G, I, N; & proinde ut *a* ad terminationem ſuæ ſeriei ita C ad ſectorem Z: at poſita 2L binario cum numero quodam cyphrarum, inveniuntur omnes M, P, R, T, X, ex tot radicis quadratæ extractionibus; & proinde poterit ſeries *a*, 2Q, *&c.* Produci ad libitum à paucis operationibus, ex gr. ſi deſiderarem terminum 16Y; produco ſeriem M, P, *&c.* in X, cujus quadrati differentia à $4L^2$ eſt quadratum ipſius Y: ſi autem quæratur terminus convergens debitus termino 16Y, dividatur duplum quadrati ipſius 16Y per $8V + 16Y$, & quotus dabit quæſitum. Atque hoc eſt compendium non inelegans ad producendas Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolæ prolixiores ſeries convergentes; non tamen eſt diſſimulandum hanc methodum eſſe lubricam & in longa continuatione multas è notis poſterioribus falſificare, ob continuam Multiplicationem Numerorum Progreſſionis Geometricæ duplæ à binario.

Antequam

Antequam accedamus ad ſecundum noſtrum compendium, conſiderentur hic Circuli proprietates quædam eximiæ.

Sit A polygonum regulare Circulo inſcriptum, B eidem ſimile circumſcriptum, C polygonum inſcriptum, duplum habens laterum numerum, D eidem ſimile circumſcriptum, & continuetur ſeries convergens, *&c.*

C erit medium Geometricum inter A & B.

D erit medium harmonicum inter C & B.

Si B ponatur perimeter polygoni B, erit C perimeter polygoni A, quoniam ſimilia polygona B, A, ſunt in duplicata ratione perimetrorum; erit quoque D perimeter polygoni D, quoniam polygona Circulo circumſcripta ſunt in eadem ratione cum ſuis perimetris; eodem modo erit E perimeter polygoni C, Item F perimeter polygoni F, & ſic deinceps.

Perimeter polygoni D erit medium harmonicum inter perimetros polygonorum A, B.

Perimeter polygoni C erit medium Geometricum inter perimetros polygonorum A, D.

Hæ proprietates non ſolum inſunt Circulo integro, ſed etiam (conſideratis conſiderandis) omni ſectori: tertiam autem proprietatem ſi animadvertiſſet *Hugenius*, illi nonopus fuiſſet tam prolixis demonſtrationibus eaſdem approximationes à polygonis ad eorum perimetros revocare, cum ſeries polygonorum eadem ſit cum ſerie perimetrorum.

Secundum noſtrum compendium conſiſtit in methodo inveniendi approximationes, quæ ſequenti theoremati ſuperſtruitur.

THEOREMA.

In quacunque ſerie convergente A B, C D, *&c. cujus terminatio* Z, *ſi fuerit quantitas* P *eodem modo compoſita à terminis* A, B, *quo* Q *à terminis* C, D, *&* P *major fuerit quam* Q: *denique ſi componatur* Q *eodem modo à quantitatibus æqualibus* X, X, *quo à terminis* C, D *erit* X *major quam* Z: *ſi autem* P *fuiſſet minor quam* Q, *foret* X *minor quam* Z.

P A B
C D
E F
Q G H
I K
L M
X
Z

Quoniam

Quoniam enim P eodem modo componitur à terminis A, B, quo Q a terminis C D, & P major eſt quam Q, erit etiam Q major quam quantitas eodem modo compoſita à terminis E F, & hæc major quam quantitas eodem modo compoſita à terminis G H, & ſic in infinitum uſque ad Z; & proinde Q multo major erit quam quantitas eodem modo compoſita à Z, Z, quo Q à C D vel X, X; hoc eſt, Q compoſita à X, X, major eſt quam quantitas eodem modo compoſita à Z, Z; & ideo X major eſt quam Z, quod, &c. Eodem prorſus modo demonſtratur ſecunda Theorematis pars.

Ex hoc Theoremate (cæteris paribus) facile patet differentiam inter X & Z eo eſſe minorem, quo minor fuerit indefinita differentia inter P & Q. Hinc patet campus vaſtiſſimus inveniendi approximationes non ſolum in Circuli & Hyperbolæ menſura, ſed etiam in omnium aliarum ſerierum convergentium terminationibus: nos tamen unam particularem methodum eligimus, quam exiſtimamus eſſe reliquis faciliorem & minus prolixam, nempe ex inventorum terminorum combinatione; in hac enim prolixæ operationes Arithmeticæ evitantur. Ope noſtræ methodi ſequentes invenimus approximationes, quæ hic examinandæ ſubjiciuntur.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra Circuli vel Ellipſeos ſectorem, B extra: continuetur ſeries convergens in infinitum (nempe in C D, E F, G H, &c.) ut ſit ejus terminatio ſeu Circuli vel Ellipſeos ſector Z. Erit Z minor quam $\frac{16C+2B-3A}{15}$ & major quam $\frac{16D+A-2B}{15}$, hæc approximatio veras notas terminorum C D triplicat. Erit Z minor quam $\frac{768F+256E-76D-4C+B}{945}$ & major quam $\frac{1024E+128D-208C+3A-2B}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum E F quadruplicat. Erit Z minor quam $\frac{12288E+16384F-576D-1328C+2B+5A}{26775}$ & major quam $\frac{512E+512F-72C+A-8D}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum E F quintuplicat. Erit Z minor quam $\frac{524288G+524288H-74240E-8704F+1095C-A+8D}{966735}$

&

& major quam

$$\frac{12582912G+16777216H-606208F-1372160E+2624D+6448C-2B-5A}{27390825}$$

hæc approximatio ſextuplicat veras notas terminorum GH. Erit Z minor quam

$$\frac{51539607552I+68719476736K-2499805184H-56329502 72G+11354112F+27783168E-10816D-26928C+2B+5A}{112165428375}$$

& major quam

$$\frac{2147483648I+2147483648K-304611328G-36175872H+4563456E+41472F-5192C-8D+A}{3958779825}$$

hæc approximatio ſeptuplicat veras notas terminorum IK.

Ut appareat hanc noſtram methodum etiam eſſe applicabilem ſeriebus ſimplicibus, ſequentes conſiderentur approximationes. Erit Z major quam $\frac{64E-20C+A}{45}$, quæ veras notas triplicat; & major quam $\frac{4096G-1344E+84C-A}{2835}$, quæ quadruplicat; & major quam $\frac{1048576I-348160G+22848E-340C+A}{722925}$, quæ quintuplicat; item & major quam

$$\frac{1073741824L-357564416I+23744512G-371008E+1364C-A}{739552275}$$

quæ ſextuplicat.

Erit quoque Z minor quam $\frac{64F-20D+B}{45}$, quæ triplicat, & major quam $\frac{4096H-1344F+84D-B}{2835}$, quæ quadruplicat, & minor quam $\frac{1048576K-348160H+22848F-340D+B}{722925}$, quæ quintuplicat; & major quam

$$\frac{107341824M-357564416K+23744512H-371008F+1364D-B}{739552275}$$

quæ ſextuplicat.

Quod, ſi quis deſideret approximationes omnium poſſibilium ſimpliciſſimas, ſequentes tales eſſe non ſine ratione affirmo. Erit Z minor quam $\frac{8C+8D-A}{15}$, & major quam $\frac{12D+4C-B}{15}$, quæ triplicat; & minor quam $\frac{320E+256F-52C+A}{525}$, & major quam

$\frac{48C+84D-2B-5A}{105}$ quæ quadruplicat; item minor quam $\frac{24704E+35072F-1356D-2460C+5B}{55965}$ & major quam $\frac{512E+512F-72C+A-8D}{945}$ quæ quintuplicat.

Omnes hæ approximationes (si analytice examinentur) præcedenti Theoremati quadrabunt; & insistendo vestigiis analyseos, dicto Theoremati superstruenda est compositio Geometrica, quæ satis difficilis & intricata reperietur. Methodum has approximationes inveniendi, ob diversas rationes mihi satis perspectas, celare statuo: paratus tamen sum non solum alias longè differentes harum loco substituere, sed etiam approximationes exhibere, quæ veras notas octuplucent, nonuplicent, decuplicent, *&c.* in infinitum etiam in aliis seriebus convergentibus ex sola hac terminorum convergentium combinatione.

Posito A polygono sectori Hyperbolico circumscripto, & B inscripto *&c*, eædem approximationes inserviunt Hyperbolæ, hoc solo observato quod (in verarum notarum triplicatione, quintuplicatione, septuplicatione, *&c.*) major approximatio nunc fiat minor & è contra.

Non opus est ut lectorem admoneam (modo prædicta intellexerit) has approximationes inservire curvis circularibus & earum adscriptis: Placet tamen sequentes approximationes exhibere huic proposito accommodatas. Sit A sinus alicujus arcus, B ejusdem tangens, C chorda & D tangens resecta a recta per terminum diametri, seu duplum tangentis semissis arcus: erit arcus minor quam $\frac{96C-22A+B}{75}$, item minor quam $\frac{16C-3A+2D}{15}$, quæ utraque veras notas triplicat, & major quam $\frac{320C+52D-56A-B}{315}$, quæ quadruplicat.

N. MERCATORIS.

QUADRATURA HYPERBOLES GEOMETRICE Demonſtrata.

PROP. I.

SI fuerint quantitates continuè proportionales A, B, C, D, E, F, *&c.* numero infinitæ, quarum prima & maxima A; erit A — B ad A ut A ad ſummam omnium; hoc enim paſſim demonſtratur apud Geometras.

PROP. II.

ElSdem poſitis quæ antecedente; dico A + B eſſe ad A ut A eſt ad exceſſum omnium A, C, E, G, *&c.* in locis imparibus, ſupra omnes B, D, F, *&c.* in locis paribus: eſt enim dictus exceſſus ſumma ſeriei infinitæ continuè proportionalium in ratione A ad C, nempe A — B, C — D, E — F, *&c.* & ideo (ex præcedente) ut A — C ad A vel $A^2 - B^2$ ad A^2, ita A — B ad ſummam dictæ ſeriei, quam vocamus Z; & priores analogiæ terminos applicando ad A — B, A + B eſt ad $\frac{A^2}{A-B}$ ut A — B ad Z, & ideo $AZ + BZ = A^2$, & proinde A + B eſt ad A ut A ad Z exceſſum omnium A, C, E, G, *&c.* ſupra omnes B, D, F, *&c.* quod demonſtrare oportuit.

PROP. III.

Fig. 1. SIt Hyperbola SB 3, cujus vertex B, aſymptotæ AR, A 4 aſymptotæ RA ducatur parallela BK, & altera ad libitum inter rectas BK, RA, utrique parallela YD; Dico YD eſſe ſummam infinitæ ſerici continuè proportionalium, cujus primus terminus BK=KA & ſecundus KD; eſt enim BK−KD=AD ad BK ut BK ad DY; & ideo ex hujus prima patet propoſitum.

Eiſdem rectis RA, BK, ultra punctum K fiat parallela 34; dico rectam 34 æqualem eſſe exceſſui omnium terminorum imparium ſupra omnes terminos pares infinitæ ſerici cujus primus terminus KB, & ſecundus K4: eſt enim KB+K4=A4 ad BK ut BK ad 34; & ideo ex hujus 2 patet propoſitum.

PROP. IIII.

Fig. 1. SIt SBKH ſpatium Hyperbolicum, contentum à curva Hyperbolica SB, aſymptotæ portione HK, & rectis SH, BK, alteri aſymptotæ parallelis, poſito B Hyperbolæ vertice: ſit parallelogrammum BKHS, & producatur B5 in R, jungatúrque KR quæ 5H ſecet in 6: deinde continuetur ſeries infinita continuè proportionalium nempe 5H, 6H, LH, NH, & ſic deinceps; ſitque 5BKH parallelogrammum, K6H triangulum, KLH trilineum quadraticum, KNH trilineum Cubicum, & ita deinceps in infinitum. Dico ſpatium Hyperbolicum, BKHS æquale eſſe dicto parallelogrammo, dicto triangulo, una cum infinitis illis trilineis, quorum omnium ſummam vocamus ω. Si Figura BKHS & ω non ſunt æquales, ſit inter illas differentia α; & dividatur recta HK in tot partes æquales à rectis aſymptotæ RA parallelis, ut rectangula (ab illis & portionibus rectæ KH contenta) Figuræ BKHS circumſcripta, nempe VH, ZD, differant à rectangulis Figuræ BKHS inſcriptis, nempè YH, BD, minore intervallo quàm α; hoc enim fieri poteſt ab indefinita diviſione rectæ KH. Quoniam B eſt Hpperbolæ vertex, parallelogrammum BKAR eſt æquilaterum; & proinde recta 6H ad libitum eſt æqualis rectæ HK, cúmque 5H, 6H, LH, NH, &c. ſint continuè proportionales in infinitum, ex hujus 3 erit recta SH æqualis ſummæ omnium, & parallelogrammum SD æqualè ſummæ omnium

parallelo-

parallelogrammorum 5 D, 6 D, L D, N D, &c. in infinitum; atque ſumma omnium parallelogrammorum 5 D, 6 D, L D, N D, &c. in infinitum, major eſt parallelogrammo 5 D unà cum portione trianguli 6 F D H unà cum portione trilinei quadratici L C D H unà cum portione trilinei cubici N C D H, &c. in infinitum, quoniam prædictæ portiones dictis parallelogrammis inſcribuntur, & ideo parallelogrammum S D majus eſt parallelogrammo 5 D unà cum dictis portionibus; eodem modo demonſtratur parallelogrammum Y K majus eſſe rectangulo 7 K unà cum infinitis numero portionibus F K D, C K D, O K D, &c. & proinde rectilineum S V Y Z K H majus eſt quàm ∞. Deindè recta F D eſt æqualis rectæ D K; atque 7 D, F D, C D, O D, &c. ſunt rectæ continuè proportionales in infinitum, & igitur recta Y D eſt æqualis ipſarum ſummæ, & parallelogrammum X D æquale parallelogrammis 7 H, F D H, C D H, O D H, &c. at ſumma parallelogrammorum 7 H, F D H, C D H, O D H, &c. minor eſt quàm rectangulum 7 H unà cum portione trianguli 6 F D H unà cum portione trilinei quadratici L C D H unà cum portione trilinei cubici N C D H, &c. quoniam dicta parallelogramma dictis portionibus inſcribuntur, & ideo parallelogrammum Y H minus eſt parallelogrammo 7 H unà cum dictis portionibus; eodem modo demonſtratur parallelogrammum B D minus eſſe parallelogrammo B D unà cum infinitis numero portionibus F K D, C K D, O K D, & ideo rectilineum X Y 7 B K H minus eſt quàm ∞: quatuor igitur ſunt quantitates, quarum maxima & minima ſunt rectilinea S V Y Z K H, X Y 7 B K H, intermediæ autem ∞ & ſpatium Hyperbolicum S B K H; & ideo differentia intermediarum, nempè ∞, minor eſt quàm differentia extremarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim major; nulla igitur eſt differentia inter Figuram S B K H & ∞, & ideo æquales ſunt, quod demonſtrandum erat.

Et proinde ſi fuerit ſeries infinita quantitatum continuè proportionalium in ratione K B ad K H = 6 H, cujus primus terminus eſt parallelogrammum B H; erit primus terminus + $\frac{1}{0}$ ſecundi + $\frac{1}{1}$ tertii + $\frac{1}{4}$ quarti + $\frac{1}{5}$ quinti + &c. in infinitum == ſpatio Hyperbolico S B K H, hoc enim evidenter ſequitur ex quadratura trilineorum. Conſ. 1.

Si autem ultra K ſumatur ſpatium B 3 4 K, poſitâ 3 4 parallela rectæ B K, & ſit ſeries infinita quantitatum in continua ratione B K ad K 4, cujus primus terminus eſt parallelogrammum K Q; erit primus terminus − $\frac{1}{2}$ ſecundi + $\frac{1}{3}$ tertii − $\frac{1}{4}$ quarti + &c. in infinitum = ſpatio Hyperbolico B 3 4 K: poterit hoc conſectarium eodem ferè modo demonſtrari Geometricè ex ſecunda concluſione hujus tertiæ, quo antecedens ex ejuſdem concluſione priore; utrumque autem ex methodo indiviſibi- Conſ. 2.

lium Cavallerianâ nullo negotio demonſtratur; ſed quoniam magni ſunt momenti, placuit methodum rigoroſam adhibere.

Quod ſi $K4 = KH$, & fuerit ſeries infinita quantitatum in continua
Conſ. 3. ratione BK ad $K4 = KH$, cujus primus terminus eſt $BH = B4$; erit exceſſus ſpatii $SBKH$ ſupra ſpatium $B34K =$ toti ſecundo termino $+\frac{1}{3}$ quarti $+\frac{1}{5}$ ſexti $+\frac{1}{7}$ octavi $+$ &c. in infinitum: Nam ex primo conſectario, ſpatium $SBKH =$ primo termino $+\frac{1}{3}$ ſecundi $+\frac{1}{5}$ tertii $+\frac{1}{7}$ quarti $+$, &c. in infinitum: & ex ſecundo conſectario ſpatium $B34K =$ primo termino $-\frac{1}{3}$ ſecundi $+\frac{1}{5}$ tertii $-\frac{1}{7}$ quarti $+$ &c. at manifeſtum eſt horum differentiam $=$ toti ſecundo $+\frac{2}{3}$ quarti $+\frac{2}{5}$ ſexti $+\frac{2}{7}$ octavi $+$ &c. & ideo patet propoſitum.

Conſ. 4. Eiſdem poſitis quæ in antecedente conſectario, manifeſtum eſt ſpatium Hyperbolicum $SH43 =$ duplo primi termini $+\frac{2}{3}$ tertii $+\frac{2}{5}$ quinti $+\frac{2}{7}$ ſeptimi $+\frac{2}{9}$ noni $+$ &c. in infinitum.

PROP. V.

Fig. 2. Sit Hyperbola CEL, cujus vertex E, & aſymptotæ AB, AY; in qua ſumantur duo ſpatia Hyperbolica ad libitum $HITR$, $KLYV$, contenta à curvâ Hyperbolicâ, unâ aſymptotâ & rectis alteri aſymptotæ parallelis: dividantur rectæ RT, VY, bifariam in S & X punctis. Dico ſpatium $HITR$ eſſe ad ſpatium $KLYV$, ut $\frac{RS \times AO}{AS} + \frac{RS^3 \times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5 \times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7 \times AO}{7AS^7} +$ &c. in infinitum ad $\frac{VX \times AO}{AX} + \frac{VX^3 \times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5 AO}{5AX^5} + \frac{VX^7 \times AO}{7AX^7} +$ &c. in infinitum. Aſymptotæ AB fiat recta parallela EO, ſitque ut AS ad AR ita $AO = EO$ ad AM; & ut AS ad AT ita AO ad AQ; ſimiliter, ſit ut AX ad AV ita AO ad AN, & AO ad AP ut AX ad AY; manifeſtum eſt $MO = OQ$ & $NO = OP$. Ductis rectis MC, ND, PF, QG, evidens eſt (ex Hyperbolæ proprietatibus) ſpatium $CGQM$ eſſe æquale ſpatio $HITR$ & ſpatium $DFPN$ ſpatio $KLYV$; at patet (ex conſectario 4 antecedentis) ſpatium $CGQM$ eſſe ad ſpatium $DFPN$, ut $MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6} +$ &c. ad $NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6} +$ &c. quæ analogia eadem eſt cum propoſita, quod demonſtrandum erat. Hinc

Hinc manifestum est (ob analogiam inter spatia Hyperbolica & Logarithmos) differentiam inter Logarithmos numerorum A, B, esse ad differentiam inter Logarithmos numerorum D, E, (posito C medio Arithmetico inter A, B, & F medio Arithmetico inter D, E, item N differentiâ inter C & A, & O differentiâ inter F & D) ut $\frac{N}{C}+\frac{N^3}{3C^3}+\frac{N^5}{5C^5}+\frac{N^7}{7C^7}+$ &c. ad $\frac{O}{F}+\frac{O^3}{3F^3}+\frac{O^5}{5F^5}+\frac{O^7}{7F^7}+$ &c. & ideo si ponatur A=D=1, hinc patet Methodus inveniendi Logarithmum quemcunque ex uno dato, absque ulla Hyperbolæ consideratione, sed calculo plerumque nimis laborioso. Quod si ponatur A = 999, B = 1001, cum datis Logarithmis, item D, E, numeri dati majores, unitate vel parvo aliquo intervallo differentes, nullo negotio invenietur differentia Logarithmorum numeris D, E, debitorum; hâc Methodo non difficulter computatur integra Logarithmorum tabula ad quotvis notas. Conf. 1.

N A
C B
O D
F E

Facilè quoque deducitur (ex 3 Consect. antecedentis Prop.) differentiam secundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica G, H, I, esse ad differentiam secundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica K, L, M, (posito P differentia inter G, H, & Q differentia inter K, L,) ut $\frac{P^2}{H^2}+\frac{P^4}{2H^4}+\frac{P^6}{3H^6}+$ &c. ad $\frac{Q^2}{H^2}+\frac{Q^4}{2H^4}+\frac{Q^6}{3H^6}+$ &c. non dissimili ferè methodo determinantur differentiæ Logarithmorum tertiæ, quartæ, quintæ, & sic deinceps; sed non est operæ pretium illas prosequi: primæ enim differentiæ compositioni Logarithmorum abundè sufficiunt.

G P H I K Q L M

ANALOGIA

ANALOGIA
Inter
LINEAM MERIDIANAM *PLANISPHERII NAUTICI*:
&
TANGENTES ARTIFICIALES
Geometricè Demonſtrata, *&c.*

PROP. I. THEOREMA.

Fig. 3. SIt Circuli quadrans TQZ, cujus pars ſit arcus QI: ſuper arcu QI imaginetur portio ſuperficiei Cylindrici recti talis naturæ, ut (ſumpto in arcu QI quolibet puncto O) perpendicularis ad planum TZQ ex puncto O ad ſummitatem portionis ſuperficiei cylindricæ excitata ſemper fiat æqualis ſecanti arcus OQ. Deinde ſit mixtilineum AIYTQ talis naturæ, ut (ducta in eo recta XD radio QT parallela & arcum quadrantis ſecante in puncto ad libitum O) recta DX, ſecans arcus OQ, & radius TQ ſint continuè proportionales. Dico mixtilineum AYTQ eſſe æquale dictæ portioni ſuperficiei cylindricæ: ſi prædictæ Figuræ non ſunt æquales, ſit inter illas differentia α, & dividatur recta YT in tot partes æquales à rectis BX, EV, radio QT parallelis, ut (completis rectangulis AX, DV, GT, CX, FV, ΛT,) differentia rectilineorum ABDEGHTY, CDFGΛQTY, ſit minor quàm α; manifeſtum eſt enim hoc fieri poſſe ab indefinita diviſione rectæ YT. Ducatur in puncto O recta tangens OPM, ſitque in rectam EV perpendicularis OS; triangula OPS, TMO, rectangula ad S & O

ſunt

sunt similia ob æqualitatem angulorum POS, OTM; nam ab angulis æqualibus nempe rectis POT, SOX, auferendo eundem angulum SOT, relinquuntur anguli æquales POS, XOT, atque ob parallelas OX, QT, angulus XOT æqualis est angulo OTM, & ideo æquales sunt anguli POS, OTM, & proinde ut OS ad OP, ita OT ad TM, ut autem OT ad TM ita TM ad XD, & igiur rectangulum OS in XD, nempe rectangulum DV, æquale est rectangulo TM in OP, sed rectangulum TM in OP majus est portione superficiei cylindricæ rectæ insistente curvæ ON, quoniam (TM existente maxima ejusdem portionis altitudine) recta PO major est quàm curva NO, ut patet ex Prop. 1. Geomet. part. universalis; & proinde rectangulum DV majus est quàm portio superficiei cylindricæ rectæ insistens curvæ ON: eodem modo demonstratur GT majus portione ejusdem superficiei insistente curvæ NQ & AX majus portione super curva IO, & ideo rectilineum ABDEGHTY majus est integrâ propositâ portione superficiei cylindricæ, idem quoque rectilineum majus est mixtilineo AQTY. Tangens in puncto N ducatur LNK, à parallelis proximis utrinque terminata in L, K, ex Prop. 1. Geomet. part. univer. patet rectam LN seu NK minorem esse arcu ON, sed (ut hactenus) demonstratur rectangulum GT vel FV æquale esse rectangulo NK vel NL in KT; atque rectangulum NL in KT minus est portione superficiei cylindricæ rectæ insistente curvæ ON, quoniam (TK existente minima ejusdem portionis altitudine) recta LN minor est curvâ ON; & proinde rectangulum EV minus etiam est quàm prædicta portio: eodem modo demonstratur rectangulum AT minus esse portione super curva NQ & rectangulum CX minus portione super curva IO, & ideo rectilineum CDFGAQTY minus est integrâ propositâ superficiei cylindricæ rectæ portione, idem quoque rectilineum minus est mixtilineo AQTY: ex prædictis ergo manifestum est quatuor esse quantitates, quarum maxima & minima sunt rectilinea ABDEGHTY, CDFGAQTY, intermediæ autem superficiei cylindricæ portio proposita & mixtilineum AQTY; & ideo differentia intermediarum minor est quàm differentia maximæ & minimæ, differentia autem maximæ & minimæ ex constructione minor est quàm a, & proinde differentia intermediarum nempe superficiei cylindricæ & mixtilinei AQTY multo minor est quàm a, quod est absurdum, ponitur enim a, non igitur differunt mixtilineum AQTY & proposita superficiei cylindricæ portio; & ideo æqualia sunt, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. II. THEOREMA.

Fig. 4. SIt Circuli quadrans QML, ſitque mixtilineum AHLQM talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum HN radio LQ parallela & quadrantis arcum ſecante in K) recta HN æqualis ſit ſecanti arcus LK, ſitque mixtilineum ABLQMA talis naturæ, ut (productâ arbitrariâ NH in B) rectæ LQ, NH, NB, ſint continuè proportionales: deinde ſit Semihyperbola IDE cujus axis MA, vertex I & aſymptoton MLE: ducatur ad libitum radio LQ parallela recta NB, curvas LKM, LHA, LBA, ſecans in punctis K, H, B; & per punctum H ducatur radio MQ recta parallela HF Hyperbolæ occurrens in puncto D. Dico Sectorem Hyperbolicum IMD æqualem eſſe ſemiſſi Figuræ BLQN, quæ Figura (ut in antecedente demonſtratum eſt) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ conflatæ ex omnibus ſecantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis ſuis punctis O normaliter inſiſtentibus. Ex *Gregorii* à S. *Vincentio* doctrina ductuum, truncus cylindrici recti ſuper Figura LHNQ reſectus à plano baſin ſenimormaliter ſecante in recta QM, æqualis eſt ſemiſſi cylindrici recti cujus baſis eſt Figura LBNQ & altitudo recta LQ, quoniam LQ ſemper eſt ad NH ut NH ad NB: manifeſtum autem eſt eundem truncum oriri ex ductu trianguli rectanguli iſoſcelis TGM in Figuram LHNQ, hoc eſt ex ducti trianguli rectanguli iſoſcelis TGM in Figuram LHNQ, hoc eſt ex ductu trianguli rectanguli iſoſcelis ϖIM in rectangulum VLQN & ex ductu trapezii TGIω in Figuram HLV; atque ſolidum factum ex ductu trianguli rectanguli ϖIM in rectangulum VLQN æquale eſt priſmati cujus altitudo LQ & baſis triangulum IλM, quod ſic probo; $MG^2 : MI^2 :: MI^2 : KN^2$, & per converſionem rationis $MG^2 : MG^2 - MI^2 = GD^2 :: MI^2 : MI^2 - KN^2 = NQ^2$, & ideo MG:GD::MI:NQ. ut autem MG ad DG ita quælibet MP=PR ad ductam PS ipſi GD parallelam, & ideo ut PR ad PS ita MI ad NQ. cúmque hoc ſemper fiat, manifeſtum eſt priſma cujus baſis λIM & altitudo IM æquale eſſe ſolido ex ductu trianguli ϖIM in rectangulum VLQN: item ſolidum factum ex ductu trapezii TGIω in Figuram HLV æquale eſt cylindrico cujus baſis eſt Figura IDλ & altitudo IM, quod ſic probo; GM:GD::MI:QN, & per converſionem rationis GM:DF::MI:GH; ducatur recta ad libitum Yξ radio MQ parallela & curvas ſecans ut in Figura, eritque GM:DF::XM:γξ, & ideo XM=XY:γξ::MI:

GH = XZ, & ideo $\chi\Upsilon \times XZ = MI \times \gamma\xi$; ut autem antè demonſtratum eſt GM eſſe ad DF ut MI ad GH, eodem modo nunc demonſtrari poteſt $XM = XY$ eſſe ad $\alpha\xi$ ut MI ad $X\theta$, & ideo $XY \times X\theta = MI \times \alpha\xi$, cúmque $XY \times XZ = MI \times \gamma\xi$, ſi ab æqualibus æqualia auferantur, $XY \times Z\theta = MI \times \alpha\gamma$, cúmque hæc æqualitas ſemper contingat, manifeſtum eſt Trapezium TGIω ductum in Figuram HLV efficere ſolidum æquale cylindrico cujus baſis IDλ & altitudo IM; & proinde totus truncus ſuper Figura HLQN ortus ex ductu trianguli TGM in eandem Figuram HLQN eſt æqualis cylindrico cujus baſis eſt ſector Hyperbolicus MID & altitudo MI, atque idem truncus æqualis eſt dimidio cylindrici cujus baſis eſt Figura BLQN & altitudo eadem IM, & ideo ſemiſſis cylindrici ſuper Figura BLQN cum altitudine IM æqualis eſt cylindrico cujus baſis MID & altitudo eadem IM, eſt igitur Figura BLQN dupla ſectoris Hyperbolici MID, quod demonſtrare oportuit.

Consectarium.

Hinc ſequitur, quòd Figura BLQN ſemper ſit dupla Logarithmi differentiæ inter tangentem & ſecantem arcus KL, poſito radio LI loco unitatis, quod ſic probo. Ex punctis I, D, in aſymptoton ME demittantur perpendiculares Iσ, Dπ; ex demonſtratis in Circ. & Hyperb. Quad. manifeſtum eſt ſectorem MID eſſe æqualem Figuræ ID$\pi\sigma$, item Figuram ID$\pi\sigma$ eſſe Logarithmum rectæ Dπ poſitâ Iσ unitate; ut autem Iσ ad Dπ ita IL radius ad DF differentiam inter tangentem & ſecantem, & ideo poſita IL unitate erit idem ſector MID Logarithmus rectæ DF, nempe exceſſus qua ſecans arcus KL ſuperat ejuſdem tangentem.

Prop. III. Theorema.

Linea Meridiana Planiſphærii Nautici *eſt Scala Logarithmorum exceſſuum, quibus* Secantes *Latitudinum ſuperant earundem* Tangentes, *poſito radio loco unitatis.*

Suppono ex Scriptoribus Nauticis in eorum Planiſphærio arcum LK in Æquatore eſſe ad eundem LK in latitudine, ut rectangulum ex LQ in KL ad portionem ſuperficiei Cylindricæ conflatæ ex omnibus ſecantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis ſuis punctis O normaliter inſiſtentibus, ſeu Figuram BLQN, demonſtratum Fig. 4.

autem est in antecedente sectorem hyperbolicum M I D seu Logarithmum rectæ D F (posita Q L unitate) differentiæ inter tangentem & secantem arcus K L esse semissem Figuræ B L Q N, patet quoque sectorem circularem Q K L esse semissem rectanguli L Q in K L; & ideo L K in Æquatore est ad L K in latitudine ut sector Q K L ad Logarithmum excessus quo secans arcus K L superat ejusdem tangentem; & ideo solidum ex L K in Logarithmum dicti excessus æquale est solido ex L K in latitudine in sectorem Q K L, & utrumque solidum applicando ad L K, Logarithmus dicti excessus æqualis est rectangulo ex L K in latitudine $\frac{Q L}{2}$; eodem modo demonstratur Logarithmum excessus, quo secans arcus cujuscunque O L excedit ejusdem tangentem, æqualem esse rectangulo ex O L in latitudine in $\frac{Q L}{2}$; & proinde Logarithmus excessus quo secans arcus K L superat ejusdem tangentem, est ad rectangulum ex L K in latitudine in $\frac{Q L}{2}$, ut Logarithmus excessus quo secans arcus O L superat ejusdem tangentem ad rectangulum ex O L in latitudine in $\frac{Q L}{2}$, & permutando, & utrumque rectangulum applicando ad $\frac{Q L}{2}$; Logarithmus excessus quo secans arcus K L superat ejusdem tangentem, est ad Logarithmum excessus quo secans arcus O L superat suam tangentem, ut arcus K L in latitudine ad arcum O L in latitudine ab Æquatore Planisphærii Nautici in linea recta computatis; & ideo linea Meridiana Planisphærii Nautici analoga est Logarithmis excessuum, quibus Secantes latitudinum superant suas Tangentes, quod demonstrare oportuit.

SCHOLIUM.

EX hoc Theoremate evidens est Methodus describendi integram meridianam, etiam ignota arcus dati in Æquatore mensura; quam mensuram ex hujus 2 tali praxe invenimus. Sit Q L radius 10000000000, D F 10000000000, & proinde ex nostra Circl. & Hyper. quadratura Prop. 32 invenietur sector hyperbolicus M I D 11512925464970228 12008, qui eandem habet rationem ad sectorem Q K L quam arcus K L in latitudine ad eundem in Æquatore, & dividendo utrumque sectorem per $\frac{Q L}{2}$ erit ut 23025850929941043624 ad arcum K L ita K L

in

in latitudine ad eundem in Æquatore; qualis autem sit arcus K L ita invenimus, ut D F excessus secantis arcus K L supra ejusdem tangentem ad L Q radium, ita L Q ad 100000000000 summam tangentis & secantis ejusdem arcus K L, erit ergo K C tangens arcus K L 495000 00000, C Q ejusdem secans 505000000000, & N Q ejusdem sinus 980198019801/101, è quibus non difficilè erit invenire ipsum arcum ope nostræ Quadr. Circ. & Hyp. Prop. 30, vel (si quis rudiore calculo contentus fuerit) è Tabula Sinuum. Ad datam autem arcûs dati in Æquatore mensuram, Meridianam Nauticam construere, praxis esset hujus inversa, quæ nullo negotio ex hac colligitur.

Ex prædictis manifestè patet Lineam Meridianam Planisphærii Nautici esse scalam tangentium artificialium arcuum, qui sunt semisses complementorum latitudinum, posito radio loco unitatis, quoniam (ut patet ex Trigonometria) prædictæ differentiæ sunt eædem cum dictis tangentibus. Si autem complementorum Secantes radio insistant, erit Figura ex illis conflata nempe A H L Q M A ad quadratum radii ut quadrans circumferentiæ ad radium, ut patet ex nostræ Geom. part. universali Prop. 2dâ.

PROP. IV. Theorema.

Sit Circuli quadrans V O A, cujus sit pars 6 ∞: super arcu 6 ∞ imaginetur superficies Cylindrici recti talis naturæ, ut (sumpto in arcu 6 ∞ quolibet puncto O) perpendicularis ad planum V A X ex puncto O ad summitatem superficiei Cylindricæ excitata semper fiat æqualis tangenti arcus O A. Sit hyperbola C P Q cujus vertex C (nempe suppositâ A C parallelâ & æquali radio X V) & asymptotæ X A, X V, ducantur rectæ P ∞ Y, 267, radio V X parallelæ: Dico spatium Hyperbolicum 2 P Y 7 æquale esse dictæ superficiei Cylindricæ; si dictæ Figuræ non sint æquales, sit inter illas differentia ∝, & dividatur recta 7 Y in tot partes æquales à planis rectæ 7 Y perpendicularibus & spatium Hyperbolicum in rectis E γ, G Z, secantibus, item superficiem Cylindricam in diversas portiones dividentibus, ut omnia rectangula Cylindrica simul hisce portionibus inscripta differant ab omnibus rectangulis Cylindricis simul eisdem circumscriptis minore quantitate quàm ∝, hoc enim absque dubio fieri potest ab indefinita divisione rectæ 7 Y; Intelligo autem rectangulum Cylindricum portioni inscriptum esse superficiem Cylindricam rectam cujus eadem est basis cum portione cui inscribitur, & altitudo ubique eadem cum minima altitudine portionis, item circumscriptum Fig. 5.

ſcriptum cui eadem etiam eſt baſis cum portione, & altitudo eadem cum portionis altitudine maxima. Compleantur rectangula 2γ, Bγ, EZ, FZ, GY, NY, & ducatur in puncto K tangens LKξ, ſitque in rectam LZ perpendicularis KM. Triangula LKM, Kξ X, rectangula ad K & M ſunt ſimilia ob angulos æquales Kξ X, LKM; & ideo ut KM ad KL, ita Kξ ad Xξ, & ideo KL × Kξ = KM × Xξ, atque γE eſt æqualis rectæ Xξ, quod ſic probo; XY eſt ad XK vel AC, ut XK ad Xξ, ſed ob Hyperbolam, Xγ eſt ad AC ut AC ad γE, ſunt ergo æquales γE, Xξ, & ideo rectangulum ex KL in Kξ æquale eſt rectangulo ex KM in Eγ nempe EZ, atque rectangulum ex KL in Kξ majus eſt rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper KO, quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe Kξ baſem habet majorem (eſt enim recta KL major quam curva KO) & ideo rectangulum EZ majus eſt rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper KO; eodem modo probatur rectangulum GY majus eſſe rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper O ω, & rectangulum 2γ majus eſſe rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper 6K; & proinde rectilineum 72DEHGRY majus eſt omnibus rectangulis cylindricis inſcriptis ſimul ſumptis, & ideo ſpatium Hyperbolicum 2PY7 eiſdem rectangulis cylindricis multò majus eſt. In puncto O ducatur tangens 3OS; demonſtratur ut antè rectangulum OS vel OI in O3 æquale eſſe rectangulo GY ſeu FZ, atque rectangulum O3 in OI minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper KO, quoniam eandem cum illo habens altitudinem, baſem habet minorem (eſt enim recta OI minor quam curva KO) & proinde rectangulum FZ minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper KO; eodem modo probatur rectangulum NY minus eſſe rectangulo cylindrico portioni ſuper O ω circumſcripto, & rectangulum Bγ minus eſſe rectangulo cylindrico portioni ſuper 6K circumſcripto; & ideo rectilineum 7BEFGNPY minus eſt omnibus rectangulis cylindricis circumſcriptis ſimul ſumptis; & ideo ſpatium hyperbolicum 2PY7 eiſdem rectangulis cylindricis multo minus eſt. Quatuor igitur ſunt quantitates, quarum maxima & minima ſunt rectangula cylindrica circumſcripta ſimul ſumpta & rectangula cylindrica inſcripta ſimul ſumpta, intermediæ autem ſpatium hyperbolicum 2PY7 & ſuperficies cylindrica ſuper curva 6 ω, & ideo differentia intermediarum minor eſt quam differentia maximæ & minimæ; at differentia maximæ & minimæ ex conſtructione minor eſt quam α, & ideo differentia intermediarum nempe ſpatii Hyperbolici & ſuperficiei cylindricæ eſt multo minor quam α, quod eſt abſurdum, ponitur enim α; non igitur differunt quantitates intermediæ, & ideo æquales ſunt, quod demonſtrandum erat.

Quod

Quòd ſi Superficies cylindrica producatur uſque ad terminum quadrantis A: dico adhuc illam eſſe æqualem ſpatio hyperbolico correſpondenti C P Y A; ſi non ſunt æquales, ſit ſuperficies cylindrica ſuper A ω major ſpatio hyperbolico C P Y A, & abſcindatur plano B 6 7 rectæ A X normali portio ſuperficiei cylindricæ, ita ut relicta nempe ſuperficies cylindrica ſuper curva 6 ω ſit æqualis ſpatio hyperbolico C P Y A, atque ſuperficies ſuper 6 ω æqualis eſt ſpatio hyperbolico 2 P Y 7, ex hactenus demonſtratis; ſpatia igitur hyperbolica C P Y A, 2 P Y 7, ſunt æqualia, quòd eſt abſurdum; ſuperficies ergo cylindrica ſuper A ω non eſt major ſpatio hyperbolico C D Y A; ſit (ſi fieri poteſt) minor & à ſpatio hyperbolico C P Y A auferatur rectâ 2 7 ipſi C A parallelâ ſpatium C 2 7 A, ita ut relictum 2 P Y 7 fiat æquale ſuperficiei cylindricæ ſuper A ω, atque ſpatium hyperbolicum 2 P Y 7 æquale eſt ſuperficiei cylindricæ ſuper 6 ω; & ideo ſuperficies cylindricæ ſuper 6 ω & ſuper A ω *inter* ſe ſunt æquales, quod eſt abſurdum; & ideo ſuperficies cylindrica ſuper A ω non eſt minor ſpatio hyperbolico C P Y A, ſed (ut ante demonſtratum eſt) nec eſt major; reſtat igitur, ut illi ſit æqualis, quod demonſtrandum erat.

Consectarium.

Hinc manifeſtum eſt ſuperficiem cylindricam ex tangentium ſumma conflatam (*v. g.* ſuper curva A ω) eſſe ſecantem artificialem ejuſdem arcus A ω, poſito radio loco unitatis; nam (ut demonſtratur in noſtra Circuli & Hyp. Quadr.) poſita C A ſeu radio loco unitatis, erit ſpatium hyperbolicum A C P Y Logarithmus rectæ Y P ſecantis arcus A ω.

PROP. V. Theorema.

Fig. 6.

Sit circuli quadrans Q C ω bifariam diviſus in puncto D. Sit arcus D M minor quam D ω, ſuper quo imaginetur ſuperficies Cylindrici recti talis naturæ, ut (ſumpto in arcu D M quolibet puncto G) perpendicularis ad planum Q C ω ex puncto G ad ſummitatem ſuperficiei cylindricæ excitata ſemper fiat æqualis ſecanti arcus G C. In radium Q C demittantur rectæ perpendiculares D V, M R, quæ producantur in ϱ & β; fiatque mixtilineum V ϱ β R talis naturæ, ut (ductâ rectâ quâcunque G T 5 rectæ D V parallelâ) tangentes arcuum G C, G ω, ſimul, nempe

nempe recta AO, æquales ſint rectæ T5. Dico mixtilineum V2βR æquale eſſe ſuperficiei cylindricæ ſuper curva DM: ſi prædictæ Figuræ non ſint æquales, ſit inter illas differentia α, & dividatur recta VR in tot partes æquales planis rectæ VR perpendicularibus, & mixtilineum V2βR in rectis T5, S8, ſecantibus & ſuperficiem cylindricam in diverſas portiones dividentibus, ut omnia rectangula cylindrica ſimul, hiſce portionibus inſcripta, differant ab omnibus rectangulis cylindricis ſimul, eiſdem circumſcriptis minore quantitate quàm α; hoc enim abſque dubio fieri poteſt ab indefinita diviſione rectæ VR. Compleantur rectangula V4, V5, T7, T8, S9, Sβ, & ducatur in puncto G tangens AGO, ſitque in rectam LS perpendicularis GK. Triangula IGK, OAQ, ſunt ſimilia, & ideo ut GK vel VT ad GI vel GE, ita QA ad AO ſeu T5, & proinde rectangulum VT in T5 nempe V5 æquale eſt rectangulo EG in AQ, atque rectangulum EG in AQ minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper GD, quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe AQ, baſem habet minorem; & ideo rectangulum V5 minus eſt rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper GD; eodem modo demonſtratur rectangulum T8 minus eſſe rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper GI, & rectangulum Sβ minus eſſe rectangulo cylindrico circumſcripto portioni ſuper LM; & ideo rectilineum V35687γβR minus eſt omnibus rectangulis cylindricis circumſcriptis ſimul ſumptis, & igitur mixtilineum V2βR eiſdem rectangulis cylindricis multo minus eſt. Ob ſimilia triangula DFH, BPQ; DH vel VT eſt ad DF ut BQ ad BP vel V2, & ideo rectangulum V4 æquale eſt rectangulo DF in BQ; at rectangulum DF in BQ majus eſt rectangulo cylindrico portioni ſuper DG inſcripto, quoniam eandem cum illo habens altitudinem BQ, baſem habet majorem; & ideo rectangulum V4 majus eſt rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper DG; eodem modo probatur rectangulum T7 majus eſſe rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper GL, & rectangulum S9 majus eſſe rectangulo cylindrico inſcripto portioni ſuper LM, & ideo rectilineum V245789R majus eſt omnibus rectangulis cylindricis inſcriptis ſimul ſumptis; eſt ergo mixtilineum V2βR eiſdem rectangulis cylindricis multo majus. Quatuor igitur ſunt quantitates, quarum maxima & minima ſunt rectangula cylindrica circumſcripta ſimul, & rectangula cylindrica inſcripta ſimul; intermediæ autem mixtilineum VTβR & ſuperficies cylindrica ſuper curva DM, & ideo differentia maximæ & minimæ eſt major differentiâ intermediarum, differentia autem maximæ & minimæ ex conſtructione eſt minor quam α, & ideo differentia intermediarum eſt multo minor quàm α,

quod

quod est absurdum, ponitur enim a; non igitur differunt quantitates intermediæ & ideo æquales sunt, quod, &c. Quòd si arcus D M sumeretur versus C, adhuc staret Prop. Demonstratio autem esset paulo diversa, quæ tamen nullo negotio ex priore colligeretur. Si punctum M in ipso C caderet, verum etiam esset *Theorema*, sed negativè per duas positiones demonstrandum, sicut in fine antecedentis.

Sit mixtilineum V X Z R talis naturæ, ut (ducta recta quacunque G T Y rectæ D X parallela) recta T Y semper æqualis fiat tangenti G O; manifestum est (ex Geomet. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum V X Z R æquale esse superficiei trunci cylindrici recti resectæ à plano basem seminormaliter secante in recta P Q, atque (ex Geom. part. univers. Prop. 3.) evidens est eandem trunci superficiem æqualem esse rectangulo N ξ in C Q, & ideo mixtilineum V X Z R eidem rectangulo est æquale. Ex prædictis evidens est mixtilineum X 2 β Z talis esse naturæ ut Y 5 semper sit æqualis tangenti G A; & proinde mixtilineum X 2 β Z unà cum portione quadrantis D V R M æquale est spatio conchoidali resecto à rectis D V, M R, cujus conchoidis vertex est C, norma P Q, polus π, C Q = Q π: ex hac Prop. & hujus 2 evidens est sequens consectarium spatio conchoidali quadrando satis expeditum.

Consectarium.

SI in prædicta conchoide accipiatur spatium contentum à curva conchoidali & rectis C T, T 6; erit prædictum spatium æquale duplo spatii hyperbolici (cujus asymptotæ Q A, Q P, semiaxis Q C) contenti à curva hyperbolica una asymptotâ & rectis Q C, Q A — G A, alteri asymptotæ parallelis, una cum semisegmento circulari C G T dempto rectangulo Q C in G T. Aliarum conchoideon spatia (nempe quando vertex & polus non æqualiter distant à normali) possunt mensurari per Analogiam à *Wallisio* in Epist. Com. pag. 171 demonstratam.

PROP. VI. Theorema.

SIt cissois K L M cujus asymptoton G M, semicirculus G D K. Fig. 7.
Diametro G K sit normalis D I L, & jungantur rectæ D K, G L;
Dico spatium cissoidale G K L triplum esse segmenti circularis D N K.
Ducatur curva K C B talis naturæ, ut (ductâ ad libitum à puncto G

recta

recta GDA, quæ tangenti occurrat in A) CDI perpendicularis rectæ GK, fiat æqualis rectæ KA. Recta DF semicirculum tangat in puncto D, & ideo æquales sunt rectæ FD, FK; cúmque angulus KDA sit rectus, patet FA, FD, esse æquales; cúmque CI semper sit æqualis duplæ ipsius DF, manifestum est (ex Geom. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum CKI esse duplum superficiei trunci cylindrici recti super curva DNK resectæ à plano basem seminormaliter secante in recta KA, atque eadem superficies trunci æqualis est rectangulo ex curva DNK in radium KH ablato rectangulo ex DI in HK (ut satis patet versatis in superficierum studio) hoc est duplo segmenti circularis DNK; est igitur mixtilineum CKI quadruplum segmenti circularis DNK. Ut DI ad IK ita est IK vel DE ad EA vel CD, & proinde æquales sunt rectæ CD, IL, cúmque hoc semper fiat, patet spatium cissoidale IKL æquale esse mixtilineo DNKC, & idem utrinque addendo nempe semisegmentum circulare DIKN, mixtilineum CKI, seu quadruplum segmenti circularis DNK, æquale est mixtilineo DNKL, & utrinque auferendo segmentum circulare DNK, triplum segmenti circularis DNK æquale est mixtilineo DOKL, seu (ob æqualitatem triangulorum DKI, GIL) ipsi spatio cissoidali proposito GKL, quod demonstrandum erat.

Hìc supponitur arcus DNK quadrante minor, quod si quadrante esset major, nullo negotio variari potest demonstratio ut illi inserviat: at KND existente semicircumferentiâ, multò facilior esset demonstratio, nempe quòd spatium cissoidale infinitè extensum æquetur semicirculi triplo.

MVSEVM BRITAN NICVM

Methodus Componendi TABULAS TANGENTIUM & SECANTIUM ARTIFICIALIUM Ex TABULIS TANGENTIUM & SECANTIUM NATURALIUM Exactiſſimè & minimo cum Labore.

SIt AI arcus quadrantis in lineam rectam extenſus, ſitque Figura AHI conflata ex tangentibus naturalibus ſingulorum arcuum à puncto A, in debitis ſuis punctis, rectis AI normaliter inſiſtentibus: ſit AP pars minima, in cui æquales dividitur quadrans, nempe $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{100}$ gradus, ſintque illi æquales PO, ON, NM, &c. & ducantur rectæ AI perpendiculares PB, OC, ND, ME, &c. manifeſtum eſt ex conſectario 4 hujus, Figuram ABP eſſe ſecantem artificialem arcus AP item Figuram ACO eſſe ſecantem artificialem arcus AO, (poſitâ cyphrâ loco radii artificialis) &c. manifeſtum eſt rectangula BO, CN, DM, &c. inveniri ex multiplicatione minimæ partis quadrantis AP in ſingulas tangentes naturales; at in menſurandis Figuris ABP, BCX, CDV, paulò major eſt difficultas; primo igitur ſi tangentes conveniant in differentiis primis, non differunt lineæ AB, BC, CD, &c. à rectis, & ideo Figuræ ABP, BCX, CDV, &c. erunt triangula rectangula, & proinde *v. g.* $GHQ = \frac{HQ \times QG}{2}$: quod ſi differentiæ ſecundæ fuerint æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum quadraticorum, *v. g.* erit GHQ portio trilinei quadratici, cujus axi HQ eſt parallela, differentiæ illæ inter ſe æquales ſint Z; & proinde erit $GHQ =$

$\frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{Z \times GQ}{12}$: si autem differentiæ tertiæ fuerint æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum cubicorum, eritque *v. g.*

$GHQ = \frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z \times GQ^2}{72} - \frac{Z^2 \times GQ^2}{1728}\right)$:

quando differentiæ quartæ sunt æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum Q-quadraticorum, & differentiæ quartæ erunt æquales 24tuplo Q-quadrati ipsius GQ diviso per cubum lateris recti, item quando differentiæ quintæ sunt æquales, erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum sursolidorum, & differentiæ quintæ erunt æquales 120plo sursolidi ipsius GQ diviso per Q-quadratum lateris recti, & sic in infinitum. Quæ hic diximus de compositione secantium artificialium ex tangentibus naturalibus eodem modo intelligi velim de compositione tangentium artificialium ex secantibus naturalibus secundum hujus tertiam. Animadvertendum tangentes & secantes artificiales suprà computari, posito o Logarithmo unitatis, 10000000000000 radio, & 23025585 09299404562401787o Logarithmo denarii: facilius autem (nimirum solâ additione) posito $\frac{1}{4096}$ grad. $= GQ = AP = 1$, computabimus tangentes & secantes artificiales ad 79157044678978 19 denarii Logarithmum; nam hac ratione $\frac{HQ \times GQ}{2} = GHQ = \frac{HQ}{2}$, item

$\frac{HQ \times GQ}{2} - \frac{Z \times GQ}{12} = GHQ = \frac{HQ}{2} - \frac{Z}{12}$, item

$\frac{HQ \times GQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z \times GQ^2}{72} - \frac{Z^2 \times GQ^2}{1728}\right) = HGQ =$

$\frac{HQ}{2} - \sqrt{q}\left(\frac{HQ \times Z}{72} - \frac{Z^2}{1728}\right)$: & tandem unicâ solâ divisione invenimus tangentes & secantes artificiales ad Logarithmum denarii 1000000000000000, posito semper radio unitatis loco, quæ sunt differentiæ tangentium & secantium artificialium in tabula ab ipso radio artificiali, & proinde divisoris multiplices, ad facilitandam operationem, in tabella subsidiaria hic reponimus. Quod si $\frac{1}{4096}$ grad. $= GQ$, tangentes & secantes artificiales debentur Logarithmo denarii 13192840779829703, cujus etiam multiplices in subjecta tabella notantur. Quod, si quis velit hos numeros potius repræsentare radium artificialem quam denarii Logarithmum, addatur cyphra & habebit intentum. Notandum hos numeros convenire radio naturali 10000000000000, hinc enim patebit numerus notarum in adscriptis artificialibus.

1	791570446789781 9	1319284077982 9703
2	1583140893579563 8	2638568155965 9406
3	2374711340369345 7	3957852233948 9109
4	3166281787159127 6	5277136311931 8812
5	3957852233948 9095	6596420389914 8515
6	4749422680738 6914	7915704467897 8218
7	5540993127528 4733	9234988545880 7921
8	6332563574318 2552	1055427261238 637624
9	7124134021108 0371	1187355670184 67327

FINIS.

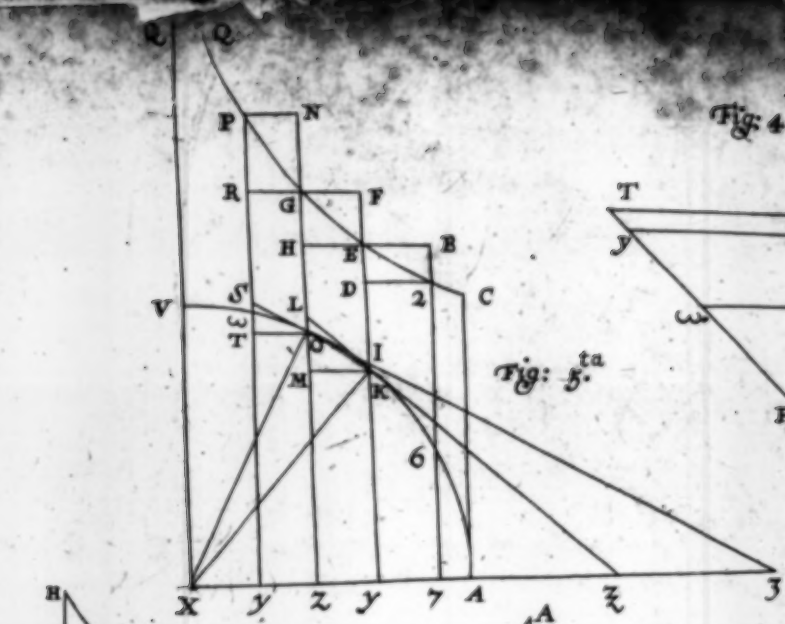


Fig: 4.ta

Fig: 5.ta

Fig: 8.ta

Fig: 7

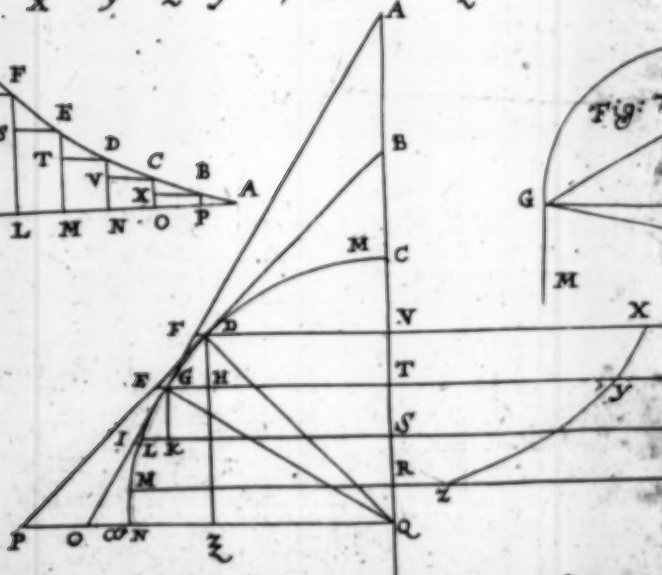


Fig: 6.ta

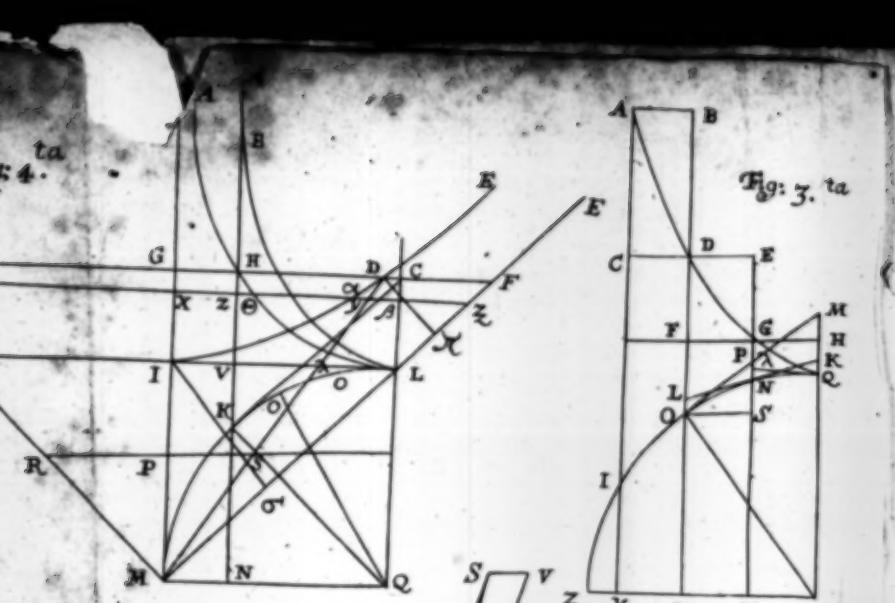


Fig: 3. ta

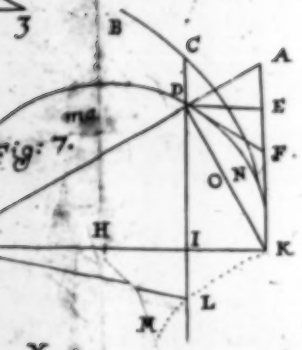
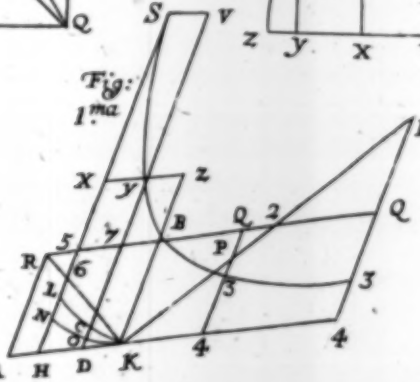


Fig: 1.ma



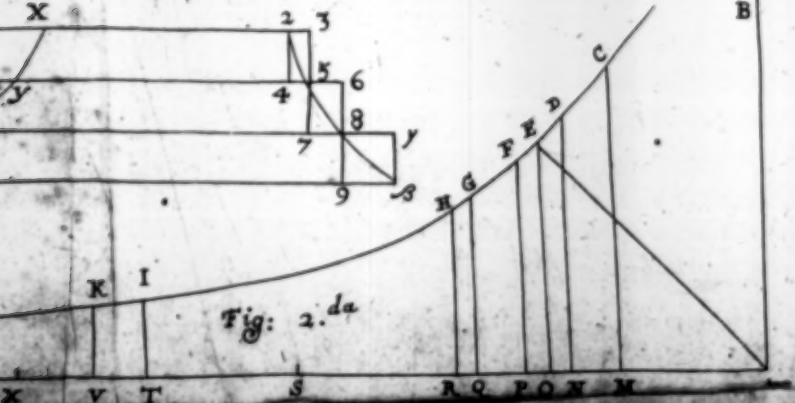


Fig: 2.da